

# 基于二维小波收缩与非线性扩散的混合图像去噪算法

吴亚东, 孙世新

(电子科技大学计算机科学与工程学院, 四川成都 610054)

**摘要:** 研究自适应滤波算法对改善图像质量具有重要意义. 本文分析了非线性扩散和二维 Haar 小波收缩去噪方法之间的关系, 从本质上说明了非线性扩散方法优于 Haar 小波收缩去噪方法. 然后, 给出了一种基于图像全变差 (TV) 模型的非线性扩散与二维 Haar 小波收缩相结合的混合图像去噪算法. 该算法在图像小波分解的低频部分采用全变差扩散, 在高频部分采用小波收缩方法. 实验结果表明, 混合去噪算法在计算复杂性与滤波效果上具有更好的综合性能.

**关键词:** 非线性扩散; 小波收缩; 全变差; 图像去噪

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0163-04

## A New Hybrid Image De-noising Algorithm Based on 2D Wavelet Shrinkage and Nonlinear Diffusion

WU Ya-dong SUN Shi-xin

(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054 China)

**Abstract** It is important for improving the image quality to study adaptive filter algorithm. In this paper we study the relations and differences between nonlinear diffusion and 2D Haar wavelet shrinkage denoising and explain that nonlinear diffusion is superior to Haar wavelet shrinkage in essence. Afterwards, a hybrid denoising algorithm, based on 2D Haar wavelet shrinkage and total variation (TV) diffusion, is given, which is a tradeoff between restoration quality of images and computing complexity. This algorithm applies TV diffusion to low frequency part of image decomposed by Haar wavelet and shrinks the wavelet coefficient. Some experiment results show that this hybrid algorithm has the better general performance.

**Key words** nonlinear diffusion; wavelet shrinkage; total variation; image denoising

### 1 引言

实际图像在形成、传输过程中, 不可避免会受到噪声干扰, 尽可能减少噪声对后续图像处理的影响, 非常具有现实意义. 图像降噪在图像预处理中应用非常广泛, 其目的是为了提高图像的信噪比, 改善图像质量. 目前, 图像去噪有许多方法: 滤波器方法, 数学形态学方法, 随机方法, 自适应平滑, 小波技术, 变分 PDE 方法等<sup>[1, 2, 4, 6-9]</sup>. 虽然这些方法都能在一定程度上达到去噪目的, 但是这些方法之间的内在联系很少有文献论及. 而分析这些方法之间的内在联系, 能够使我们认识各种方法的本质及其优劣, 有利于综合各种方法的优点, 为产生新的复合算法提供指导思路.

小波技术与非线性扩散滤波是两类重要去噪方法, 其中软阈值去噪<sup>[1]</sup>与各向异性扩散<sup>[7]</sup>, 尤其是全变差 (total variation) 模型扩散<sup>[2, 6]</sup>, 是较为有效的两种去噪手段, 有着广泛应用, 研究两者之间的内在联系具有十分重要的理论和现实意义. G. Steidl, J. Weikert 等<sup>[3, 5]</sup>在二者联系方面进

行了开创性的研究, 证明了一维 Haar 小波的单一尺度收缩, 等效于两个像素对的一次全变差模型扩散. 并推导了收缩函数与扩散函数之间的相互转换关系.

本文首先分析了二维 Haar 小波收缩与非线性扩散模型之间的关系, 给出了非线性扩散在二维 Haar 小波收缩框架下的滤波解释. 从本质上说明了非线性扩散方法优于 Haar 小波收缩去噪方法. 在分析这两种滤波方法优劣的基础上, 给出了一种基于图像全变差模型的非线性扩散滤波与二维 Haar 小波收缩相结合的混合图像去噪算法. 实验结果表明, 混合去噪算法在计算复杂性与滤波效果上具有更好的综合性能.

### 2 小波收缩去噪与非线性扩散去噪

#### 2.1 小波收缩去噪方法

图像经过二维离散小波变换后, 其能量主要集中在低频部分, 而在高频部分的能量较低. 可以认为在高频部分, 绝对幅值比较大的小波系数主要是由真实图像信号提供, 而绝对值比较小的小波系数是由噪声提供. 基于这种假

设,小波收缩去噪方法可以分为以下三个步骤:

(1)小波分解:对输入的二维信号进行小波变换,生成低频分量  $CA_i$  和小波系数  $CH_p, CV_p, CD_p, i=1, 2, \dots, n$  为分解尺度.

(2)小波收缩:设置收缩函数  $S_\theta$   $\theta$  为阈值,对小波系数进行收缩,压制图像中的噪声.

(3)小波重构:将低频分量和收缩后的小波系数进行小波逆变换,生成去除噪声后的图像信号.

考虑四象素点情形,设  $\begin{bmatrix} u_{ij} & u_{i+1,j} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$  为要处理的二维信号矩阵.采用 Haar小波进行单尺度小波收缩.设  $a$  为分解后的低频分量,  $cV, H, D$  分别为分解后垂直、水平以及对角方向的小波系数.

即: 
$$\begin{cases} a = (u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 \\ H = (u_{ij} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1})/2 \\ cV = (u_{ij} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1})/2 \\ D = (u_{ij} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1})/2 \end{cases} \quad (1)$$

应用小波收缩,并重构二维信号,设收缩函数为  $S_\theta$

$$\begin{cases} u'_{ij} = \frac{a + S_\theta(H) + S_\theta(cV) + S_\theta(D)}{2} \\ u'_{i,j+1} = \frac{a + S_\theta(H) - S_\theta(cV) - S_\theta(D)}{2} \\ u'_{i+1,j} = \frac{a + S_\theta(cV) - S_\theta(H) - S_\theta(D)}{2} \\ u'_{i+1,j+1} = \frac{a + S_\theta(D) - S_\theta(cV) - S_\theta(H)}{2} \end{cases} \quad (2)$$

### 2.2 非线性扩散去噪

Perona和Malik<sup>[7]</sup>最先给出一种基于偏微分方程模型的非线性扩散滤波方法,其主要思想是在滤波器自身中引入部分边缘检测步骤,允许在算法开始时各种尺度之间进行交互.提出用非线性方程替换热力学方程:

$$u_t = \text{div}(c(x, y, t) \nabla u) = c(x, y, t) \Delta u + \nabla c \cdot \nabla u \quad (3)$$

其中,  $c(x, y, t)$  为热传导因子.在式(3)中,令  $c(x, y, t) = g(|\nabla u|)$ ,扩散方程可写为:

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (g(|\nabla u|) \cdot \nabla u) \\ &= g(|\nabla u|) \cdot \Delta u + \Delta u \nabla g(|\nabla u|) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\nabla u = (u_x, u_y)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ,若  $g(|\nabla u|) = 1/\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ,式(4)便是由Rudin等<sup>[2,6]</sup>提出的全变差扩散模型.该模型能够在去除噪声同时,较好保持图像的边缘信息,应用十分广泛.

### 3 Haar小波收缩与非线性扩散方法的关系

对于  $u = \begin{bmatrix} u_{ij} & u_{i+1,j} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$  进行非线性扩散滤波,假定矩阵  $u$  在边界方向是周期性的.对式(4)采用差分方法进行离散化,取  $u_{x+1,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}$ ,  $u_{x+1,j+1} = u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}$

并设网格步长为 1 时间间隔为  $\tau$  则对于点  $u_{ij}$  进行一次非线性扩散有:

$$\begin{aligned} u'_{ij} &= u_{ij} + (g_{i,j+1} + g_{ij})(u_{i,j+1} - u_{ij}) \\ &\quad + (g_{i+1,j} + g_{ij})(u_{i+1,j} - u_{ij}) \end{aligned} \quad (5)$$

令  $\Sigma u = (u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})$ ,式(5)可以化为:

$$u'_{ij} = \Sigma u/4 + (1/4 - g_{i+1,j} - g_{ij})(u_{ij} - u_{i+1,j}) + (1/4 - g_{i,j+1} - g_{ij})(u_{ij} - u_{i+1,j+1}) + 1/4(u_{ij} - u_{i+1,j+1})$$

同理可得:

$$u'_{i+1,j} = \Sigma u/4 + (1/4 - g_{i+1,j+1} - g_{i,j+1})(u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) + (1/4 - g_{i+1,j} - g_{ij})(u_{i+1,j} - u_{ij}) + 1/4(u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1})$$

$$u'_{i+1,j+1} = \Sigma u/4 + (1/4 - g_{i+1,j+1} - g_{ij+1})(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) + (1/4 - g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j})(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}) + 1/4(u_{i+1,j+1} - u_{ij})$$

为了描述方便,令:

$$\begin{aligned} H_1 &= (u_{ij} - u_{i+1,j})(1/4 - g_{i+1,j} - g_{ij}), \\ H_2 &= (u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1})(1/4 - g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j}), \\ V_1 &= (u_{ij} - u_{i,j+1})(1/4 - g_{i,j+1} - g_{ij}), \\ V_2 &= (u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1})(1/4 - g_{i+1,j} - g_{i+1,j+1}), \\ D_1 &= u_{ij} - u_{i+1,j+1}, D_2 = u_{i,j+1} - u_{i+1,j} \end{aligned}$$

则,对  $u$  进行一次非线性扩散滤波可以用方程描述如下:

$$\begin{cases} u'_{ij} = \Sigma u/4 + H_1 + V_1 + D_1/4 \\ u'_{i,j+1} = \Sigma u/4 + H_2 - V_1 + D_2/4 \\ u'_{i+1,j} = \Sigma u/4 - H_1 + V_2 - D_2/4 \\ u'_{i+1,j+1} = \Sigma u/4 - V_2 - H_2 - D_1/4 \end{cases} \quad (6)$$

与小波收缩去噪方法所得方程(2)相比较有:

$$\begin{cases} a = \Sigma u/2 \\ S_\theta(H) = H_1 + H_2 + (D_1 + D_2)/4 \\ S_\theta(cV) = V_1 + V_2 + (D_1 - D_2)/4 \\ S_\theta(D) = H_1 + V_1 - V_2 - H_2 \end{cases} \quad (7)$$

式(7)表明了非线性扩散滤波在 Haar小波收缩框架下的含义:对于小波分解的低频部分,在空域中不进行处理;对于水平细节的小波系数,在空域中进行垂直方向的扩散,并使用对角差值进行调和;对于垂直细节的小波系数,在空域中进行水平方向的扩散,并使用对角差值进行调和;对于对角细节的小波系数,在空域中进行两个对角方向的扩散.

从上述分析可知,非线性扩散滤波与  $u_{ij}$  的具体位置相关,是一种从局部向整体的逐渐扩散过程;而小波收缩去噪方法,则是对小波系数进行统一处理.所以,如果不考虑小波系数之间的相关性和局部特征,Haar小波收缩去噪效果不会优于非线性扩散滤波.但是,由于非线性扩散滤波采用迭代计算,计算量较大,而小波收缩去噪方法则比较快速.这促使我们考虑结合小波收缩和非线性扩散滤波方

法的优点, 提出具有更好综合性能的去噪算法.

### 4 基于小波收缩与非线性扩散的混合去噪算法

基于上节分析, 我们给出了一种基于图像全变差模型的非线性扩散与二维 Haar 小波收缩相结合的混合图像去噪算法. 该混合算法对图像经 Haar 小波分解的低频部分采用全变差扩散进行滤波处理; 对高频部分采用通常的软收缩方法. 该算法充分考虑了两种去噪算法的优势: 在去噪效果方面, 对分解后低频部分进行非线性滤波优于多尺度的 Haar 小波收缩去噪. 由于在分解后的高频部分集中了较多的噪声, 采用小波收缩处理是合理的, 并且充分利用了小波收缩的快速性. 在计算复杂性方面, 图像经过一次 Haar 小波分解后, 低频部分减小为原始图像的 1/4 对低频部分进行非线性滤波的计算量与对整幅图像采用非线性滤波相比大大减少. 另一方面, 由于低频部分的信噪比较高, 因此, 非线性滤波的收敛速度也较快. 混合算法较好结合了非线性扩散与小波收缩方法的优点, 能够用较少的运算量得到与全变差扩散相近的滤波效果. 混合算法的主要步骤:

- (1) 对图像进行一次 Haar 小波分解. 设二维信号为  $u$ , 分解后产生低频分量  $a$ , 和水平、垂直、对角小波系数:  $H, cV, D$ .
- (2) 小波收缩处理. 采用软收缩方法<sup>[3,7]</sup>, 得到新的水平、垂直、对角小波系数  $S_{\theta}(H), S_{\theta}(cV), S_{\theta}(D)$ . 设收缩函数为  $S_{\theta}$  对每个小波系数有:
- (3) 全变差 (TV) 扩散滤波. 对分解后的低频部分进行  $n$  次 TV 扩散, 记为:  $TV^n(a)$ .
- (4) 将 2, 3 步的处理结果综合, 进行小波逆变换, 重构图像信号.

$$u' = \mathbf{WT} \begin{pmatrix} TV^n(a) & S_{\theta}(cV) \\ S_{\theta}(H) & S_{\theta}(D) \end{pmatrix}$$

算法计算量分析:

设去噪处理的图像大小为  $M * M, M = 2^m, m \in Z$ . 仅考虑乘法运算, 分解级数为 1 的 Haar 小波软收缩算法的计算量约为:  $8M * M$  次乘法. 对整幅图像进行一次 TV 扩散滤波的运算量约为:  $15 * M * M$  次乘法. 所以, 混合算法的运算量约为:  $(8 + 15/4) * M * M$  次乘法. 因此, 对整幅图像进行一次 TV 扩散的运算量约为混合算法的 1.3 倍. 当对整幅图像进行  $N$  次 TV 扩散时, 混合算法也对低频分量进行  $N$  次 TV 扩散. 此时, TV 扩散与混合算法计算量之比约为:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{15N}{8 + 15N/4} \approx 4$  实际上, 由于低频分量部分的信噪比较高, 因此混合算法往往不需要进行  $N$  次扩散就可达到最优效果.

### 5 仿真结果与讨论

在 AMD XP2200+ 兼容机上, 采用 Matlab6.5 进行算法仿真. 实验对象为  $256 * 256$  的标准灰度图像, 对其加入不同方差的高斯噪声产生带噪图像. 分别采用两级 Haar 小波软收缩、全变差扩散滤波以及混合算法进行去噪处理. 小波收缩阈值采用全局阈值<sup>[1,10]</sup>,  $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$ ,  $\sigma$  为噪声方差,  $N$  为图像像素个数. 在实际应用中,  $\sigma \approx m / 0.6745$ ,  $m$  表示小波系数中的值<sup>[19]</sup>. 全变差扩散滤波取时间, 空间步长分别为  $t = 0.2, h = 1$ . 若迭代前后两幅图像的均方误差小于给定值  $\epsilon$  则扩散滤波结束. 对于混合算法和全变差扩散分别取  $\epsilon = 1.0, \epsilon = 0.25$ . 为了比较去噪算法之间的差别, 实验中假设噪声方差已知. 去噪效果采用峰值信噪比 PSNR (peak signal to noise ratio) 衡量. 三种算法的去噪效果如图 1 所示. 表 1 显示了在不同噪声水平下, 三种算法去噪后的 PSNR. 表 2 显示了混合算法与全变差扩散的实际计算时间.

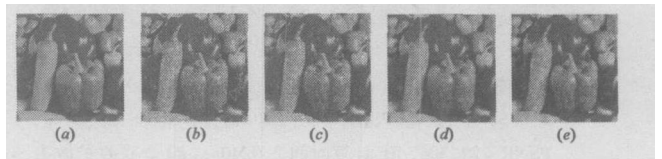


图 1 去噪效果对比图. (a) 原始图像, (b) 加入方差为 50 的高斯噪声图像, PSNR = 14.7097dB (c) 小波软收缩去噪, PSNR = 20.0103dB, (d) 混合算法去噪, PSNR = 23.7530dB (e) 全变差扩散去噪, PSNR = 24.8369dB.

表 1 三种算法去噪后 PSNR 比较 (单位: dB)

噪声方差	25	50	75	100
噪声图像	20.3332	14.7097	11.8933	10.2331
Haar 小波软收缩	24.1947	20.0103	17.3595	15.6548
混合算法	26.1136	23.7530	21.7568	20.1282
全变差扩散	28.7862	24.8369	22.2584	20.4315

表 2 混合算法与全变差扩散的计算时间比较 (单位: 秒)

噪声方差	25	50	75	100
混合算法	1.7920	3.0150	4.3260	5.1670
全变差扩散	17.5750	33.3480	48.4800	56.5210

从实验结果可以看出, 混合算法的去噪效果优于 Haar 小波收缩方法. 就去噪后图像的视觉效果与客观评价指标而言, 混合算法与全变差扩散相差不多. 根据表 2 混合算法的计算时间约为全变差扩散滤波的 1/10 因此, 混合算法较好保留了两种去噪方法的优点: 低计算复杂度和较好的局部特征, 具有更好的综合性能.

混合噪声去除实验. 对原始图像叠加方差为 50 的高斯噪声和 10% 的脉冲噪声. 图 2 显示了上述三种算法对混合噪声的去除效果. 从图 2 的去噪效果以及计算时间可以看出, 混合噪声的去除依然满足上述结论.

其他小波基函数实验. 采用双正交样条小波 (Bior4.4) 代替 Haar 小波. 对加入方差为 50 的高斯噪声图像进行去

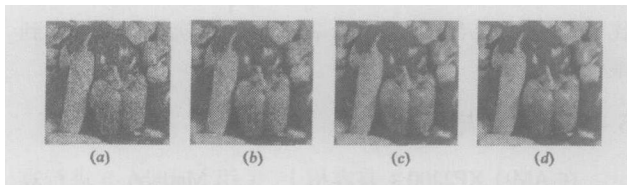


图 2 去噪效果对比图. (a)噪声图像, PSNR= 12.2397dB, (b)小波软收缩去噪, PSNR= 20.3921dB, (c)混合算法去噪, PSNR= 22.0353dB, 计算时间 3.8060s (c)全变差扩散去噪, PSNR= 23.5070dB, 计算时间 41.2290s

噪处理. 图 3给出了实验效果. 从图 3可以看出, 混合算法与全变差扩散滤波的去噪效果更加接近, 计算时间仍然约为全变差扩散的  $1/10$  符合 Haar小波的相关结论, 并且效果更优. 但从理论上如何推广 Haar小波的相关结论, 以及描述其他小波基函数收缩方法与非线性扩散之间的关系仍然有待进一步研究.

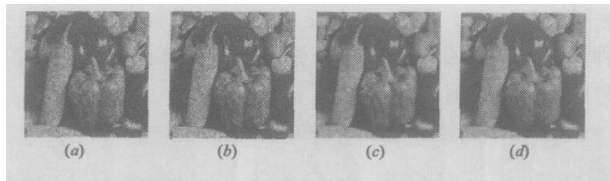


图 3 去噪效果对比图. (a)噪声图像, PSNR= 14.6912dB, (b)小波软收缩去噪, PSNR= 20.1830dB, (c)混合算法去噪, PSNR= 24.3067dB, 计算时间 2.9240s (d)全变差扩散去噪, PSNR= 24.7181dB, 计算时间 33.4190s

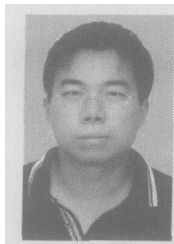
## 6 结论

本文分析了非线性扩散和二维 Haar小波收缩去噪方法之间的关系, 给出了非线性扩散在 Haar小波收缩框架下的滤波解释, 进而说明了非线性扩散方法优于 Haar小波收缩去噪方法. 针对小波收缩与非线性扩散方法的特点, 给出了一种混合去噪算法. 实验结果表明, 混合算法去噪效果优于小波收缩方法, 与全变差扩散相差不多. 在计算时间上, 混合算法约为全变差扩散的  $1/10$  因此, 混合算法保留了两种去噪方法的优点: 低计算复杂度和较好的局部特征, 具有更好的综合性能.

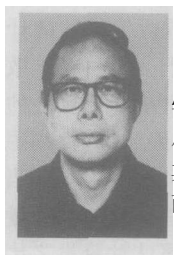
## 参考文献:

- [1] Donoho D L. Denoising by soft thresholding [J]. IEEE Trans Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] Rudin L, et al Non linear total variation based noise removal algorithm [J]. Phys D, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [3] Steidl G, Weickert J Relations between soft wavelet shrinkage and total variation denoising [A]. Proceedings of the 24th DAGM Symposium on Pattern Recognition [C]. London: Springer Press, 2002. 198-205.
- [4] Mrazek P, et al Correspondences between wavelet shrinkage and non linear diffusion [A]. Scale Space Methods in Computer Vision [C]. Berlin: Springer Press, 2003. 101-116.
- [5] Steidl G, et al On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization and SDEs [J]. SIAM Numerical Analysis, 2004, 42(2): 686-713.
- [6] Rudin L, Osher S. Total variation based image restoration with free local constraints [A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing [C]. Piscataway: IEEE Press, 1994. 31-35.
- [7] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [8] 曲天书, 等. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪 [J]. 电子学报, 2002, 30(2): 266-268.  
Qu Tian-shu, et al Adaptive wavelet thresholding denoising method based on SURE estimation [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(2): 266-268 (in Chinese).
- [9] 袁泽剑, 等. 一种非线性扩散滤波器的设计方法及其应用 [J]. 计算机学报, 2002, 25(10): 1072-1076.  
Yuan Ze-jian, et al A design method for non linear diffusion filter and its application [J]. Chinese J Computers, 2002, 25(10): 1072-1076 (in Chinese).
- [10] Donoho D L, Johnstone I M. Threshold selection for wavelet shrinkage of noisy data [A]. Proceedings of the 16th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society [C]. Baltimore: IEEE Press, 1994. 24-25.

## 作者简介:



吴亚东 男, 1979年4月出生于河南周口, 2000年获得郑州大学计算机科学系学士学位, 2003年获得西南科技大学计算机科学与技术学院硕士学位, 现为电子科技大学计算机科学与工程学院博士研究生, 主要从事图像图形处理, 网络计算等方面的研究.  
E-mail: wyd028@163.com.



孙世新 男, 1940年3月出生于湖北孝感, 1966年毕业于四川大学数学系, 现为电子科技大学计算机科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要从事图像处理, 网络计算技术, 并行/分布式计算及其应用, 信息压缩技术, 数值计算与组合算法等方面的研究.